

# Grafos Half Cut

Rubens A. Sucupira<sup>1</sup>, Sulamita Klein<sup>2</sup>, Luerbio Faria<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

<sup>2</sup>COPPE Sistemas – Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

**Abstract.** [Erdős 1965] showed that every graph  $G = (V, E)$  with  $m$  edges admits an edge cut of size at least  $\frac{m}{2}$ . In this paper we define a new graph class: *Half Cut graphs*. A graph is *Half Cut* if it admits an edge cut with exactly  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  edges. We also give some simple examples such as paths, cycles and complete graphs that must satisfy special conditions to be *Half Cut* graphs.

**Resumo.** [Erdős 1965] mostrou que todo grafo  $G = (V, E)$  com  $m$  arestas admite um corte de arestas com cardinalidade pelo menos  $\frac{m}{2}$ . Neste artigo definimos a classe de grafos *Half Cut* como os grafos que admitem um corte de arestas com cardinalidade igual a  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ . Nós também damos exemplos de grafos tais como caminhos, ciclos e grafos completos que devem satisfazer condições especiais para que sejam do tipo *Half Cut*.

## 1. Definições e Exemplos

Dados um grafo  $G = (V, E)$  com  $n$  vértices e  $m$  arestas, e um subconjunto não vazio próprio  $S \subset V$ , definimos o *corte de arestas*  $\partial S$  como o conjunto formado por todas as arestas com exatamente um extremo em  $S$ . Dizemos que um corte de arestas  $\partial S$  tal que  $|\partial S| = \lceil \frac{m}{2} \rceil$  é um *half cut*. Um grafo  $G = (V, E)$  é do tipo *Half Cut* se admite um *half cut*.

Um exemplo trivial de grafo *Half Cut* é o grafo completo  $K_3$  no qual todo corte de arestas tem cardinalidade  $2 = \lceil \frac{3}{2} \rceil$ . Outro exemplo simples da classe dos grafos completos é  $K_4$  que tem 6 arestas e admite um *half cut* tomando-se  $S = \{v\}$  para qualquer  $v \in V$ , já que  $d(v) = 3$  para todo  $v \in V(K_4)$ .

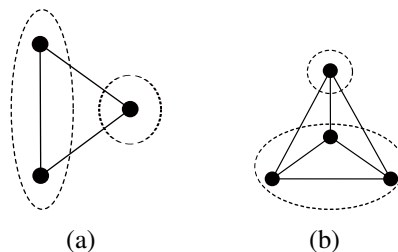


Figura 1. (a) Half cut de  $K_3$  e (b) Half cut de  $K_4$ .

Na próxima seção mostramos que todo caminho  $P_n = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$  é do tipo *Half Cut* e que um ciclo  $C_n$  com  $n > 3$  é do tipo *Half Cut* se e somente se  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ou  $n \equiv 3 \pmod{4}$ .

## 2. Caminhos, Ciclos e Árvores

**Teorema 2.1.** *Todo caminho é do tipo Half Cut.*

*Demonstração.* Seja  $P_n = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$  um caminho com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas. Temos dois casos a considerar: No primeiro caso,  $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ , basta tomarmos  $S = \{v_i | i \equiv 0 \pmod{2}; 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\}$  para obtermos um half cut. No segundo caso,  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ , e podemos tomar  $S = \{v_i | i \equiv 1 \pmod{2}; 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\}$  para obtermos tal corte. As Figuras 2 e 3 ilustram esses dois casos.

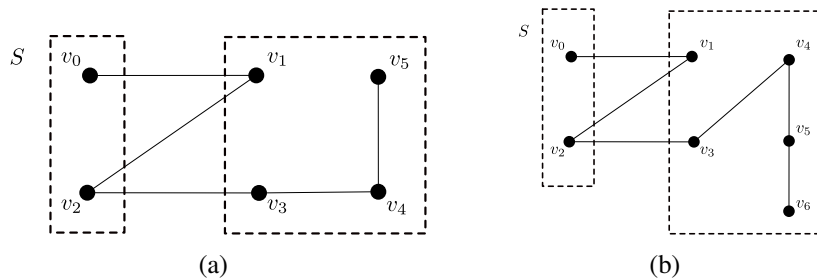


Figura 2. (a) Half cut de  $P_6$  e (b) Half cut de  $P_7$ .

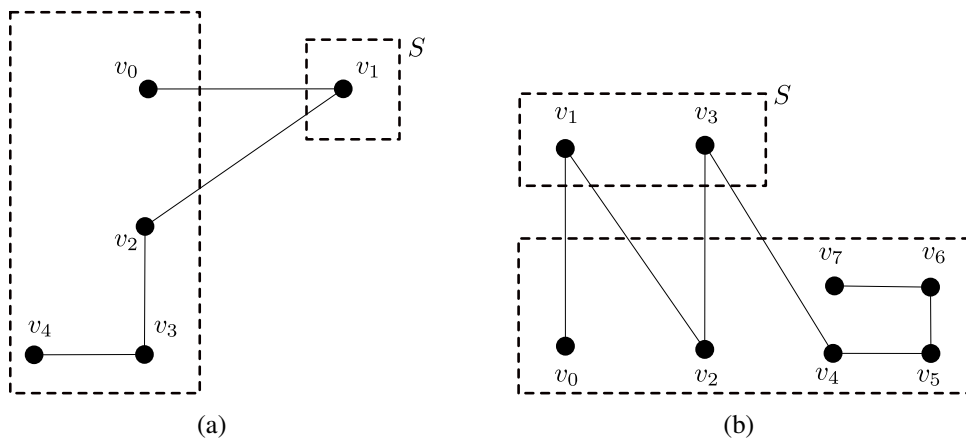


Figura 3. (a) Half cut de  $P_5$  e (b) Half cut de  $P_8$ .

□

**Teorema 2.2.** *Um ciclo  $C_n$  é do tipo Half Cut se e somente se  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ou  $n \equiv 3 \pmod{4}$ .*

*Demonstração.* Seja  $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$  um ciclo com  $n > 3$ . Inicialmente podemos observar que todo corte de arestas em um ciclo tem cardinalidade par, já que o ciclo é um caminho fechado. Portanto se  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  é ímpar, não existe nenhum corte de arestas de  $C_n$  com metade das arestas do ciclo, ou seja, para que o problema da determinação do Half Cut tenha solução, é necessário que  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  seja par. Temos dois casos a considerar:  $n \equiv 0 \pmod{4}$  e  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Se  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , basta tomarmos  $S = \{v_i | i \equiv 2, 3 \pmod{4}\}$  para obtermos um half cut, já que cada um desses vértices corresponde a uma aresta de corte. Observando que as sequências  $(4i + 2)$  e  $(4i + 3)$  para

$0 \leq i \leq \frac{n}{4} - 1$  são duas progressões aritméticas, ambas com o mesmo número de termos  $\frac{n}{4}$ , obteremos um corte com  $\frac{n}{2}$  arestas.

Se  $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ , vamos analisar a paridade de  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  obtendo dois subcasos a considerar. Caso  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  seja par, podemos tomar  $S = \{v_i | i \equiv 2, 3(\text{mod } 4)\}$  e caso  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  seja ímpar, tomamos  $S = \{v_i | i \equiv 2, 3(\text{mod } 4), 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}\} \cup \{v_i | i \equiv 1, 2(\text{mod } 4), \frac{n+1}{2} \leq i \leq n-1\}$ .  $\square$

**Teorema 2.3.** *Toda árvore é do tipo Half Cut.*

*Demonstração.* Aplicamos indução forte sobre o número de arestas da árvore. Para uma árvore com uma aresta temos um caminho  $P_2$  e segue imediatamente do Teorema 2.1 o resultado. Suponhamos que toda árvore com  $m$  arestas, sendo  $1 \leq m \leq k$  é do tipo Half Cut. Dada uma árvore  $T$  com  $k+1$  arestas, a remoção de uma aresta qualquer de  $T$  desconecta esse grafo dando origem a pelo menos duas componentes conexas que são subárvores de  $T$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que a remoção da aresta  $e = \{u, v\} \in E(T)$  dá origem às árvores  $T_1$  e  $T_2$ , com  $m_1$  e  $m_2$  arestas, respectivamente, sendo  $u \in V(T_1)$  e  $v \in V(T_2)$ . Se o número de arestas de  $T$ , dado por  $m = m_1 + m_2 + 1$  for par, então  $m_1 + m_2$  é ímpar, ou seja, uma das subárvores tem um número par de arestas, enquanto a outra tem número ímpar. Digamos que  $m_1$  seja par e  $m_2$  seja ímpar. Pela hipótese de indução existem cortes de arestas de  $T_1$  e de  $T_2$  com cardinalidades  $\frac{m_1}{2}$  e  $\frac{m_2+1}{2}$ , respectivamente. Logo basta tomarmos  $S \subset V$  tal que  $u \in S$  e  $v \in S$  e teremos um corte de arestas com  $\frac{m_1+m_2+1}{2}$  arestas, ou seja,  $\frac{m}{2}$  arestas como desejado. Se  $m$  é ímpar, então  $m_1$  e  $m_2$  são ambos pares ou ambos ímpares. Caso sejam ambos ímpares, pela hipótese de indução existem cortes de  $T_1$  e  $T_2$  com  $\frac{m_1+1}{2}$  e  $\frac{m_2+1}{2}$  arestas, respectivamente. Novamente fazendo  $u \in S$  e  $v \in S$  e teremos um corte de arestas com  $\frac{m_1+m_2+2}{2}$  arestas, ou seja,  $\frac{m+1}{2} = \lceil \frac{m}{2} \rceil$  arestas. Caso sejam ambos pares, pela hipótese de indução existem cortes de  $T_1$  e  $T_2$  com  $\frac{m_1}{2}$  e  $\frac{m_2}{2}$  arestas, respectivamente. Posicionando apenas um dos vértices  $u$  ou  $v$  em  $S$ , obtemos um corte de arestas com  $\frac{m_1+m_2}{2} + 1$  arestas, isto é,  $\frac{m_1+m_2+2}{2}$  arestas, o que conclui a demonstração.  $\square$

### 3. Grafos Completos do tipo Half Cut

Sabemos que em um grafo completo com  $n$  vértices, um corte de arestas  $\partial S$  tem cardinalidade dada por  $|S| \cdot (n - |S|)$ . A partir desse fato podemos determinar condições necessárias e suficientes para que um grafo completo seja do tipo Half Cut.

Em um grafo completo com  $n$  vértices, sabemos que  $m = \frac{n(n-1)}{2}$ , isto é, um half cut deverá ter  $\lceil \frac{n(n-1)}{4} \rceil$  arestas. Desse modo, precisamos resolver a equação  $p(n-p) = \lceil \frac{n(n-1)}{4} \rceil$  na qual  $p = |S|$ , para determinarmos um half cut, caso exista. Analisando os casos  $n \equiv 0(\text{mod } 4)$ ,  $n \equiv 1(\text{mod } 4)$ ,  $n \equiv 2(\text{mod } 4)$  e  $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ , chegamos à conclusão que existe um half cut se, e somente se, existe um natural  $q$  tal que  $n = q^2$  ou  $n = q^2 + 2$ . Obtemos assim o teorema a seguir.

**Teorema 3.1.** *O grafo completo  $K_n$  é do tipo Half Cut se e somente se  $n = q^2$  ou  $n = q^2 + 2$ .*

*Demonstração.* De fato, se  $n \equiv 0(\text{mod } 4)$  ou  $n \equiv 1(\text{mod } 4)$ , então  $\frac{n(n-1)}{4}$  é inteiro e podemos resolver diretamente a equação  $p(n-p) = \frac{n(n-1)}{4}$ , obtendo como soluções

$p = \frac{n+\sqrt{n}}{2}$  e  $p = \frac{n-\sqrt{n}}{2}$  que só têm sentido se  $n$  for quadrado perfeito, já que  $p$  é inteiro positivo. Se  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , então  $n = 4k + 2$  para algum natural  $k$  e assim temos  $\lceil \frac{n(n-1)}{4} \rceil = 4k^2 + 3k + 1$ . Resolvendo a equação associada obtemos as soluções  $p = (2k+1) + \sqrt{k}$  e  $p = (2k+1) - \sqrt{k}$  que só têm sentido quando  $k$  é um quadrado perfeito. Desse modo devemos ter  $n = 4q^2 + 2$ , sendo  $k = q^2$ . Se  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , então  $n = 4k + 3$  para algum natural  $k$  e assim temos  $\lceil \frac{n(n-1)}{4} \rceil = 4k^2 + 5k + 2$ . Resolvendo a equação associada obtemos as soluções  $p = \frac{n+\sqrt{4k+1}}{2}$  e  $p = \frac{n-\sqrt{4k+1}}{2}$  que só têm sentido quando  $4k+1 = n-2$  é um quadrado perfeito. Desse modo, devemos ter  $n-2 = q^2$ , ou seja,  $n = q^2 + 2$ . Portanto um grafo completo  $K_n$  é do tipo Half Cut se e somente se  $n = q^2$  ou  $n = q^2 + 2$ .  $\square$

#### 4. Grafos Graciosos

Uma rotulação graciosa de um grafo  $G = (V, E)$  é composta por uma rotulação dos vértices  $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$  e uma rotulação das arestas  $f_\gamma : E \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  definida por  $f_\gamma(\{u, v\}) = |f(u) - f(v)|$  ambas injetivas. Se  $G$  admite uma rotulação graciosa, então  $G$  é dito um *grafo gracioso*. [Golomb 1972] provou que todo grafo gracioso é do tipo Half Cut. A seguir apresentamos a demonstração desse fato devida a ele.

**Teorema 4.1.** *Todo grafo gracioso é do tipo Half Cut.*

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo gracioso com uma rotulação  $f$ . Considere  $S = \{u \in V | f(u) \equiv 0 \pmod{2}\}$ . Como existem  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  inteiros ímpares entre 1 e  $m$ , e uma diferença ímpar só é possível efetuando-se uma subtração entre um inteiro par e um ímpar, então o número de arestas conectando vértices com paridades distintas é exatamente  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ .  $\square$

[Rosa 1966] provou que todo caminho  $P_n$  e os ciclos  $C_n$  com  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ou  $n \equiv 3 \pmod{4}$  são grafos graciosos. Desse modo, os resultados obtidos na Seção 2 poderiam ter sido encontrados como consequência do Teorema 4.1. Grandes esforços têm sido feitos na tentativa de provar a conjectura de Ringel-Kotzig [Huang et al. 1982] a qual afirma que todas as árvores são graciosas. Nesse artigo fornecemos processos algorítmicos para a determinação dos half cuts em classes simples de grafos e, além disso, mostramos que a classe dos grafos graciosos está estritamente contida na classe dos grafos Half Cut, pois há vários grafos Half Cut que não são graciosos, como por exemplo, os grafos completos  $K_n$  com  $n = q^2$ , sendo  $q > 2$ .

#### Referências

- Erdős, P. (1965). On some extremal problems in graph theory. *Israel Journal of Mathematics*, 3:113–116.
- Golomb, S. W. (1972). How to number a graph. *Graph theory and computing*, pages 23–37.
- Huang, C., Kotzig, A., and Rosa, A. (1982). Further results on tree labellings. *Util. math.*, 21c, pages 31–48.
- Rosa, A. (1966). On certain valuations of the vertices of a graph. In *Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome)*, pages 349–355.